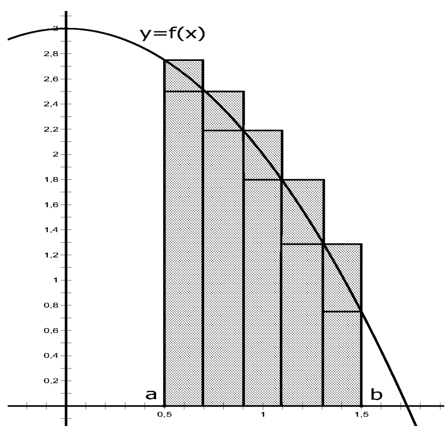
Poglavlje 1

Određeni integral

1.1 Određeni integral i osnovna svojstva

Problem kojeg ovdje razmatramo sastoji se od određivanja površine P ravninskog područja omeđenog grafom pozitivne funkcije f, $x-$osi i pravcima $x = a$ i $x = b$. Razdijelit ćemo interval $[a, b]$ na n podsegmenata jednake duljine (pet na donjoj slici), gdje je n proizvoljan prirodni broj. Označimo: $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}$, $\dots$, $x_n = b$.



Slika 1.1: Području čiju površinu želimo odrediti upisujemo i opisujemo pravokutnike baze $\triangle_n = \frac{b-a}{n}$.

Promatrajmo "upisane" pravokutnike: bazna stranica svih takvih pravokutnika je duljine $\triangle_n = \frac{b-a}{n}$, dok druga stranica redom iznosi $f(c_1)$, $f(c_2)$, $\dots$, $f(c_n)$, za neke $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ako sa s_n označimo sumu svih površina takvih upisanih pravokutnika, očito će biti $s_n = \sum_{i=1}^{n} \triangle_n \cdot f(c_i)$.

Slično, možemo promatrati i "opisane" pravokutnike. Oni također svi imaju duljinu bazne stranice $\triangle_n$, a druga stranica redom iznosi $f(C_1)$, $f(C_2)$, $\dots$, $f(C_n)$, za neki $C_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ako sa S_n označimo sumu svih površina takvih opisanih pravokutnika, bit će $S_n = \sum_{i=1}^{n} \triangle_n \cdot f(C_i)$.

Imamo: $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \triangle_n$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\cdot \triangle_n$. Očito vrijedi:

$$s_n \leq P \leq S_n.$$

Što se događa kada profinjujemo podjelu intervala na sve manje podintervale (ne nužno jednake duljine), tj. kada $n \to \infty$? Vidimo da bi u tom slučaju trebalo očekivati sljedeće: $P = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$. Međutim, to se ne mora uvijek dogoditi. Za funkciju f promatranu na intervalu $[a, b] \subset \mathcal{D}(f)$ kod koje to jest slučaj kažemo da je **integrabilna na intervalu** $[a, b]$. **Određeni integral** funkcije f na intervalu $[a, b]$ označava se s $\int_a^b f(x)dx$, a po definiciji je jednak broju

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot \triangle x_i,$$

gdje je $\max \triangle x_i$ najveća od svih duljina podintervala *proizvoljno* uzete podjele intervala $[a, b]$, a x_i^* *proizvoljni* elementi intervala $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Brojeve a i b zovemo redom **donja**, odnosno **gornja granica integracije**, a interval $[a, b]$ **interval integracije**.

Pozabavimo se geometrijskom interpretacijom određenog integrala: očito je iz definicije da je u našem primjeru (kad je funkcija na cijelom intervalu integracije poprimala samo nenegativne vrijednosti) određeni integral brojčano jednak površini P područja kojeg smo proučavali - pseudotrapeza omeđenog grafom Γ_f, $x-$osi te pravcima $x = a$ i $x = b$. Poznavanje pojma određenog integrala i tehnika njegovog računanja je vrlo korisno pri rješavanju problema površina, volumena i slično.

Cijelo dosadašnje razmatranje bilo je vezano uz situaciju kada f poprima nenegativne vrijednosti na cijelom intervalu $[a, b]$. Ako to nije slučaj, morat ćemo interval $[a, b]$ razbiti na niz podintervala takvih da f u svakom od njih poprima ili samo pozitivne ili samo negativne vrijednosti (uključivši i nulu). Tada će površina pseudotrapeza biti dana kao suma svih određenih integrala na podintervalima na kojima funkcija poprima nenegativne vrijednosti *umanjena* za sumu svih određenih inegrala na podintervalima na kojima f poprima negativne vrijednosti. Ovo slijedi iz osnovnih svojstava određenog integrala integrabilnih funkcija f i g na intervalu $[a, b] \subseteq \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ (prva dva svojstva su definicijska):

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, gdje je c konstanta

(4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ za svaki $c \in <a, b>$.

(6) $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ako je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$.

1.2 Newton-Leibnizova formula

Nas će najprije zanimati tehnike računanja određenog integrala. Ovdje se ključnom pokazuje sljedeća činjenica:

Teorem 1.2.1 *(Newton-Leibnizova formula) Ako je funkcija f integrabilna na intervalu $[a, b]$ i ima na tom intervalu primitivnu funkciju F (funkciju takvu da je $F' = f$), onda je*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Često umjesto $F(b) - F(a)$ pišemo skraćeno $F(x)|_a^b$, pa Newton-Leibnizovu formulu možete pamtiti u ovom obliku:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b.$$

Napomena: Znamo da je, prema definiciji, neodređeni integral funkcije f jednak primitivnoj funkciji F, točnije čitavoj klasi primitivnih funkcija $\{F + C | C \in \mathbb{R}\}$. Dakle, dovoljno je naći neodređeni integral funkcije f i potom određeni integral izračunati kao razliku vrijednosti primitivne funkcije u gornjoj i donjoj granici integracije. Pritom je važno uvidjeti da ovaj račun *ne ovisi* o tome kojeg smo predstavnika klase primitivnih funkcija izabrali. Naime, ako su F_1 i F_2 dvije primitivne funkcije funkcije f na intervalu $[a, b]$, onda znamo da postoji realna konstanta C takva da je $F_2 = F_1 + C$, pa je

$F_1|_a^b = F_1(b) - F_1(a) = F_1(b) + C - (F_1(a) + C) = F_2(b) - F_2(a) = F_2|_a^b$.

Stoga se (radi jednostavnosti) kod računa određenog integrala *zanemaruje aditivna konstanta.*

Primjer 1

Izračunajte određeni integral $\int_2^3 4x^3 dx$.

Rješenje:

Znamo da je primitivna funkcija funkcije $g(x) = x^3$ dana s $G(x) = \frac{x^4}{4}$ i tu činjenicu uz svojsvto (3) i Newton-Leibnizovu formulu koristimo u računu:

$$\begin{aligned} \int_2^3 4x^3 dx &= 4\int_2^3 x^3 dx = 4 \cdot (\frac{x^4}{4})|_2^3 = \\ &= (x^4)|_2^3 = 3^4 - 2^4 = 65. \end{aligned}$$

Primjer 2

Izračunajte $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$.

Rješenje:

Koristimo svojstva (3) i (4):

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx &= \int_1^2 x^2 dx - 2\int_1^2 x dx + 3\int_1^2 dx = \\ &= (\frac{x^3}{3})|_1^2 - 2(\frac{x^2}{2})|_1^2 + 3x|_1^2 = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Primjer 3

Izračunajte $\int_0^3 |x-2|dx$.

Rješenje:

Koristimo svojstvo (5):

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x-2|dx &= \int_0^2 -(x-2)dx + \int_2^3 (x-2)dx = \\ &= -(\frac{x^2}{2}-2x)|_0^2 + (\frac{x^2}{2}-2x)|_2^3 = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Zadatak 1 Izračunajte sljedeće određene integrale:

(1) $\int_1^2 2xdx$

(2) $\int_1^2 \frac{1}{x^6}dx$

(3) $\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

(4) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$

(5) $\int_0^{10} \sqrt{10x-x^2}dx$

(6) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

(7) $\int_1^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x}dx$

(8) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(9) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

(10) $\int_{-\frac{3}{2}}^1 \frac{1}{x^2+4x+5}dx$.

1.3 Supstitucija u određenom integralu

Kao i kod neodređenog integrala i pri računanju određenog integrala često se koristi tehnika supstitucije integracijske varijable. Pritom možemo upotrijebiti jednu od sljedeće dvije metode:

(1) izvršimo zamjenu integracijske varijable i računamo neodređeni integral - nakon što nađemo primitivnu funkciju vraćamo se na staru varijablu; ovaj postupak *ne zahtijeva* promjenu granica integracije

(2) integracijsku varijablu mijenjamo direktno u određenom integralu - ovaj postupak podrazumijeva i odgovarajuću *promjenu granica integracije*.

Pri radu s ovom tehnikom posredno koristimo sljedeći teorem:

Teorem 1.3.1 *Za neprekidnu funkciju f na intervalu $[a,b]$ i diferencijabilnu funkciju $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ takvu da je φ' neprekidna i $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Primjer 4

Koristeći obje metode supstitucije izračunajte $\int_0^2 2x(x^2+1)^3 dx$.

Rješenje:

1. način: Najprije računamo neodređeni integral koristeći supstitucijsku varijablu, a potom vraćamo izvornu varijablu i računamo dređeni integral. Supstitucija koju ćemo ovdje koristiti je $t = x^2 + 1$, iz čega slijedi da je $dt = 2xdx$. Sada možemo zamijeniti sve podintegralne elemente supstitucijskom varijablom:

$$\int 2x(x^2+1)^3 dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{(x^2+1)^4}{4},$$

pa je

$$\begin{aligned} \int_0^2 2x(x^2+1)^3 dx &= \frac{(x^2+1)^4}{4}|_0^2 = \\ &= \frac{(2^2+1)^4}{4} - \frac{(0^2+1)^4}{4} = \frac{625}{4} - \frac{1}{4} = 156. \end{aligned}$$

2. način: Osim podintegralnih elemenata, supstituirat ćemo i granice integracije. Supstitucija $t = x^2 + 1$ odgovara i na pitanje koje su (u terminima varijable t) nove granice integracije: za donju granicu imamo $x = 0 \Rightarrow t = 1$, a za gornju $x = 2 \Rightarrow t = 5$, pa integral postaje

$$\int_0^2 2x(x^2+1)^3 dx = \int_1^5 t^3 dt = (\frac{t^4}{4})|_1^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 156.$$

Napomena:

Važno je uočiti pogodnu supstituciju i pritom paziti da je veza između početne i supstitucijske varijable jednoznačna.

Primjer 5

Izračunajte određeni integral $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$.

Rješenje:

Uvodimo supstituciju $1 + 2x = t^2$, odakle slijedi $x = \frac{t^2-1}{2}$, što nakon diferenciranja daje $dx = tdt$.

Ako pokušamo izraziti supstitucijsku varijablu t preko početne integracijske varijable x, naići ćemo na poteškoće. Naime, iz veze $1 + 2x = t^2$ nije moguće jednoznačno izračunati supstitucijsku vezu, jer imamo dvije mogućnosti: $t = \sqrt{1+2x}$ ili $t = -\sqrt{1+2x}$. Oba ova izbora su dobra, ali se nužno trebamo odlučiti za samo jedan i s njime potom nastaviti račun. Neka je veza dana s $t = \sqrt{1+2x}$.

1. način: za donju granicu integracije imamo $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3}$, a za gornju $x = 4 \Rightarrow t = 3$, pa je

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx &= \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}\cdot tdt}{t} = \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{t^2-1}{2}dt = \\ &= \frac{1}{2}(\frac{t^3}{3} - t)|_{\sqrt{3}}^3 = \frac{1}{2}(\frac{3^3}{3} - 3 - \frac{\sqrt{3}^3}{3} + \sqrt{3}) = 3.\end{aligned}$$

2. način: računamo najprije neodređeni integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx = \int \frac{t^2-1}{2}dt = \frac{1}{2}(\frac{t^3}{3} - t),$$

a potom se vraćamo na početnu integracijsku varijablu x: $t = \sqrt{1+2x}$, pa je konačno

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{1+2x}^3}{3} - \sqrt{1+2x})|_1^4 = 3.$$

Što bi se dogodilo da smo za vezu između x i t uzeli $t = -\sqrt{1+2x}$? Računajmo po prvom načinu: za donju granicu integracije imamo $x = 1 \Rightarrow t = -\sqrt{3}$, a za gornju $x = 4 \Rightarrow t = -3$, pa je (obratite pažnju na predznak $-$ u podintegralnoj funkciji!)

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx &= \int_{-\sqrt{3}}^{-3} \frac{\frac{t^2-1}{2}\cdot tdt}{-t}dt = -\int_{-\sqrt{3}}^{-3} \frac{t^2-1}{2}dt = \int_{-3}^{-\sqrt{3}} \frac{t^2-1}{2}dt = \\ &= \frac{1}{2}(\frac{t^3}{3} - t)|_{-3}^{-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\frac{(-\sqrt{3})^3}{3} + \sqrt{3}) - \frac{(-3)^3}{3} - 3)) = 3.\end{aligned}$$

Posebno su važne supstitucije kod kojih funkcijska veza između početne i supstitucijske varijable nije očita, kao u sljedećem primjeru.

Primjer 6

Izračunajte $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$.

Rješenje:

Uvodimo tipičnu supstituciju za ovakve integrale: $x = \sin t$, odakle slijedi $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$, a $dx = \cos tdt$. Da bismo imali jednoznačnu vezu između x i t, moramo odabrati smo jedan dio domene sinusne funkcije, i to takav da se postižu sve vrijednosti iz skupa vrijednosti $[-1, 1]$. Uzmimo $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Kako u tom području kosinus poprima samo pozitivne vrijednosti, možemo maknuti znak apsolutne vrijednosti, pa je $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Dalje, granice integracije sada nije teško odrediti: za donju granicu imamo $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$, a za gornju $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, pa je

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t \cdot \cos tdt = \\ &= (\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t)|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{24}(5\pi + 3\sqrt{3} + 6).\end{aligned}$$

Primjer 7

Izračunajte $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$.

Rješenje:

Uvodimo supstituciju $e^x - 1 = t^2$. Sada je $e^x dx = 2tdt$, pa iz $e^x = t^2 + 1$ slijedi $dx = \frac{2t}{t^2+1}dt$. Ako uzmemo $t = \sqrt{e^x - 1}$, onda za donju granicu integracije imamo $x = 0 \Rightarrow t = 0$, a za gornju $x = ln2 \Rightarrow t = 1$, pa je

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{t^2+1}dt &= 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \\ &= 2\int_0^1 (1 - \frac{1}{t^2+1})dt = 2(t - \arctan t)|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 2 Metodom supstitucije riješite sljedeće određene integrale:

(1) $\int_0^1 (x+3)^{10} dx$

(2) $\int_{-1}^2 x\sqrt{8 - x^2}dx$

(3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$

(4) $\int_0^1 x^3\sqrt{x^2 + 3}dx$

(5) $\int_0^2 (2 - 3x^2)(x^3 - 2x + 1)^2 dx$

(6) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+9}}dx$

(7) $\int_1^8 \frac{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

(8) $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$

(9) $\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x}dx$

(10) $\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{2 + 3\cos^2 x}\sin 2x dx$

(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}dx$.

1.4 Parcijalna integracija u određenom integralu

Kao i kod neodređenog integrala, i kod računanja određenog integrala možemo koristiti tehniku parcijalne integracije, tj. formulu

$$\int_a^b udv = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Pritom je važno primijetiti da se u ovako skraćenoj formuli nigdje eksplicitno ne piše integracijska varijabla x, ali da se granice integracije a i b odnose upravo na nju.

Primjer 8

Izračunajte $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

Rješenje:

Parcijalno integriramo na sljedeći način: $\frac{dx}{\sin^2 x} = dv \Rightarrow v = -\cot x$, $u = x \Rightarrow dx = du$, pa je

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx &= (-x\cot x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x dx = \\ &= -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4} \cdot 1 + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} dx \end{aligned}$$

Uvodimo supstituciju $\sin x = t$, odakle je $\cos x dx = dt$, pa je

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} dx &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t} = (\ln t)|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \ln\sqrt{3} - \ln\sqrt{2} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Zadatak 3

Primjenom parcijalne integracije izračunajte sljedeće određene integrale:

(1) $\int_0^3 \arctan x dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin x dx$

(3) $\int_0^{e-1} \ln(1+x) dx$.

1.5 Nepravi integral

Često se u zadacima pojavljuju integrali funkcija koje se ne mogu evaluirati u nekoj od rubnih točaka ili u nekoj od unutrašnjih točaka intervala integracije. U tom slučaju koristimo sljedeću definiciju:

Definicija 1.5.1 *Ako se neka od granica integracije nalaze u beskonačnosti definiramo:*

(1) $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$

(2) $\int_{-\infty}^b dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$

(3) $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx$,

uz uvjet da svaki od ovih limesa postoji i konačan je.

Ako unutar integracijskog intervala $[a,b]$ *funkcija* f *ima prekid u točki* c *ili u toj točki nije definirana, onda definiramo*

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \to c-0} \int_a^{\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \to c+0} \int_{\epsilon_2}^b f(x)dx.$,
uz uvjet da svaki od ovih limesa postoji i konačan je.

Primjer 9
Izračunajte $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.
Rješenje:
Koristimo gornju definiciju i računamo

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} (\ln x)|_1^b = \\ &= \lim_{b\to\infty} \ln b - \ln 1 = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty. \end{aligned}$$

Primjer 10
Izračunajte $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.
Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{a\to-\infty} (\arctan x)|_a^0 + \lim_{b\to\infty} (\arctan x)|_0^b = \\ &= \lim_{a\to-\infty} (-\arctan a) + \lim_{b\to\infty} (\arctan b) = \\ &= -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Napomena: Slično kao gore pokušajte riješiti $\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{1+x^2}$. Ako nacrtate sliku podintegralne funkcije, izgleda (zbog njene neparnosti) kao da ovaj nepravi integral postoji i jednak je nuli. Međutim, rješavanje po principu gornjeg primjera vodi nas na zbroj dva limesa, od kojih je prvi $-\infty$, a drugi ∞, što znači da ovaj nepravi integral *ne postoji.*

Pogledajmo što se događa kada podintegralna funkcija ima prekid unutar integracijskog područja:

Primjer 11
Izračunajte $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.
Rješenje:
Očito je da podintegralna nije definirana u točki $x = 2$, pa je

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} &= \lim_{\epsilon_1\to2-0} \int_1^{\epsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} + \lim_{\epsilon_2\to2+0} \int_{\epsilon_2}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \\ &= \lim_{\epsilon_1\to2-0} (3\sqrt[3]{x-2})|_1^{\epsilon_1} + \lim_{\epsilon_2\to2+0} (3\sqrt[3]{x-2})|_{\epsilon_2}^4 = \\ &= \lim_{\epsilon_1\to2-0} (3\sqrt[3]{\epsilon_1-2} + 3) + \lim_{\epsilon_2\to2+0} (3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{\epsilon_2-2}) = \\ &= 3 + \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Primjer 12

Izračunajte $\int_0^\infty xe^{-x}dx$.

Rješenje:

Koristimo tehniku parcijalne integracije: $x = u \Rightarrow dx = du$, $dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$, pa je

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x}dx &= (-xe^{-x})|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = \\
&= \lim_{b\to\infty}(-xe^{-x})|_0^b + \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})|_0^b = \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{-b}{e^b} + \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^0) = (L'H) = \\
&= \lim_{b\to\infty}(\frac{-1}{e^b}) + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Zadatak 4 Izračunajte sljedeće neprave integrale:

(1) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-1)^2}$

(2) $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

(3) $\int_0^\infty e^{-x}dx$

(4) $\int_0^\infty \sin x dx$

(5) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(6) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

(7) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$

(8) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(9) $\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(10) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(11) $\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \ln x)dx$.

Poglavlje 2

Primjene određenog integrala

2.1 Površina ravninskog lika

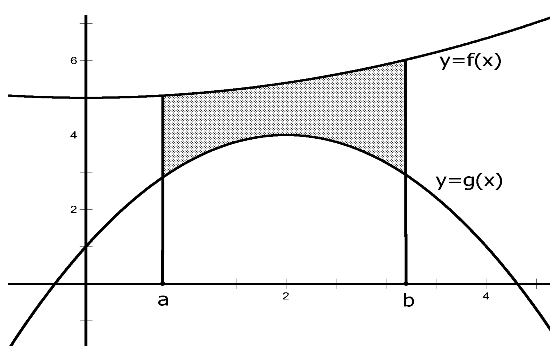
Za dani ravninski lik omeđen krivuljama $y = f(x)$ i $y = g(x)$ te pravcima $x = a$ i $x = b$ treba odrediti njegovu površinu P (vidi sliku). Koristimo činjenicu da je površina tog lika jednaka razlici površina lika omeđenog pravcima $x = a$, $x = b$, osi x i krivuljom $y = f(x)$ te lika omeđenog s $x = a$, $x = b$, osi x i krivuljom $y = g(x)$. Zaključujemo:

$$P = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$$

tj.

$$P = \int_a^b (f - g)(x)dx.$$

Ova jednostavna formula temelj je računa površina ravninskih likova gore opisanog tipa.

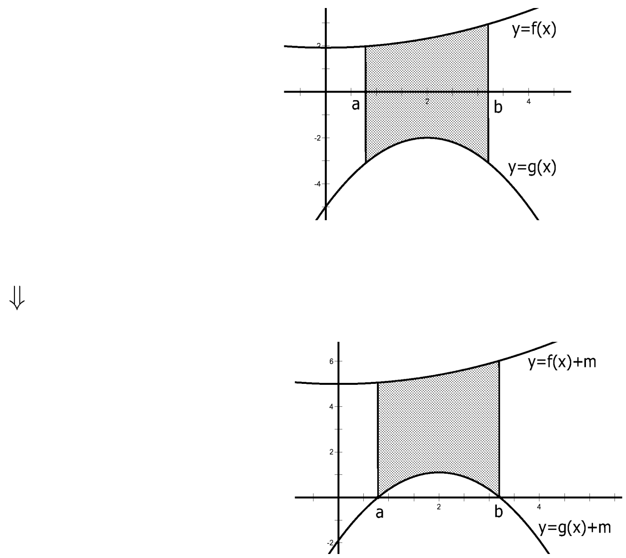


Slika 2.1: Površina P jednaka je razlici površina određenih grafovima Γ_f i Γ_g

Gornja formula vrijedi i u slučaju da nije $f(x) \geq 0$ i $g(x) \geq 0$ za sve $x \in [a, b]$, ali uz uvjet da je $f(x) - g(x) \geq 0$ za sve $x \in [a, b]$. Naime, prema slici je očito da možemo translatirati krivulje Γ_f i Γ_g duž $y-$osi koliko je potrebno (recimo za neku veličinu m) do situacije sa slike 2.1., na kojoj su sve vrijednosti funkcija f i g na intervalu $[a, b]$ nenegativne (vidi sliku 2.2.). Naime, tada se površina P koju tražimo očito neće promijeniti, a možemo primijeniti poznatu formulu:

$$P = \int_a^b [f(x) + m]dx - \int_a^b [g(x) + m]dx = \int_a^b (f - g)(x)dx.$$

Dakle, možemo primijeniti već postojeću formulu čak i u slučaju da nisu sve vrijednosti podintegralnih funkcija na intervalu integracije nenegativne.



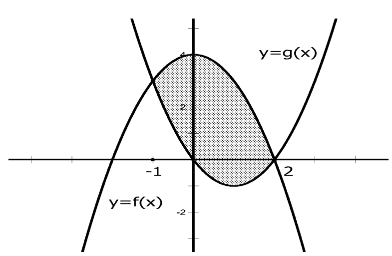
Slika 2.2: Formulu razlike površina možemo primijeniti i na funkcije kojima nisu sve vrijednosti na integracijskom području nenegativne.

Primjer 13

Izračunajte površinu područja ograničenog s $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 2x$.

Rješenje:

Grafovi ovih funkcija omeđuju lik (označimo mu površinu s P) određen točkama presjeka ovih krivulja, a to su točke s apscisama $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$ – vidi sliku. Označimo $f(x) := 4 - x^2$ ("gornja funkcija"), $g(x) := x^2 - 2x$ ("donja funkcija").



Sada je

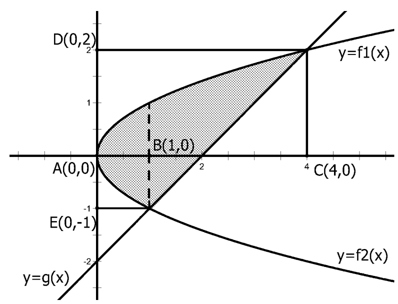
$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^{2}(f-g)(x)dx = \int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx = \\ &= (-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x)|_{-1}^{2} = 9. \end{aligned}$$

Primjer 14

Izračunajte površinu P omeđenu krivuljama $y^2 = x$ i $y = x - 2$.

Rješenje:

Formula koju smo do sada primjenjivali podrazumijevala je da funkcije čiji grafovi omeđuju ravninski lik čiju površinu tražimo možemo eksplicitno napisati u integracijskoj varijabli. Ovdje moramo uočiti da krivulja $y^2 = x$ ima dva kraka (dvije mogućnosti za eksplicitni zapis), $f_1(x) := \sqrt{x}$ i $f_2(x) := -\sqrt{x}$. Ako nacrtamo sliku, vidjet ćemo da uz korištenje ovako zapisanih podintegracijskih funkcija možemo primijeniti poznatu formulu.



Vrijedi:

$$\begin{aligned} P &= \int_{0}^{1}(\sqrt{x}-(-\sqrt{x}))dx + \int_{1}^{4}(\sqrt{x}-(x-2))dx = \\ &= 2(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}})|_0^1 + (\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x)|_1^4 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Međutim, postoji i jednostavniji način da se ovaj zadatak riješi. Naime, ako već ne možemo iz $y^2 = x$ dobiti eksplicitni izraz za y kao funkciju od x, možemo obratno – eksplicitno izraziti x pomoću y: $x = y^2$. Također, iz $y = x - 2$ izlazi $x = y + 2$, a iz slike je odmah vidljivo da je integraciju po varijabli y lakše provesti, jer "gledano sa strane osi y" vidimo da se radi o dvjema funkcijama u varijabli x koje na intervalu integracije (sada zadanom donjom granicom $y = -1$ i gornjom granicom $y = 2$) poprimaju samo nenegativne vrijednosti, pa imamo

$$P = \int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy = (-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y)|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Sada možemo napisati još jednu formulu: za funkcije f i g zadane u varijabli y na intervalu $[c, d]$ površina P lika omeđenog krivuljama Γ_f i Γ_g te pravcima

$y = c$ i $y = d$ je dana s

$$P = \int_c^d (f-g)(y)dy.$$

Ponekad je pri rješavanju zadataka s površinama pogodnije preći na polarne koordinate, kao u sljedećem primjeru. Ako pritom računamo površinu lika određenog krivuljama $r = r_1(\varphi)$ i $r = r_2(\varphi)$ te rubnim polupravcima integracijskog područja $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, koristit ćemo sljedeću formulu:

$$P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ({r_1}^2 - {r_2}^2)d\varphi.$$

Za vježbu ćemo riješiti pomoću ove formule i jedan zadatak koji se inače može lako riješiti elementarnim metodama.

Primjer 15

Koristeći određeni integral izračunajte površinu P određenu krivuljama zadanim jednadžbama $x^2 + y^2 + 8x = 0$, $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

Rješenje:

Nakon što transformiramo jednadžbe ovih krivulja vidimo da se radi o kružnicama:

$x^2 + y^2 + 8x = 0 \;\; / + 16 \Rightarrow (x+4)^2 + y^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 + 4x = 0 \;\; / + 8 \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 2^2$,

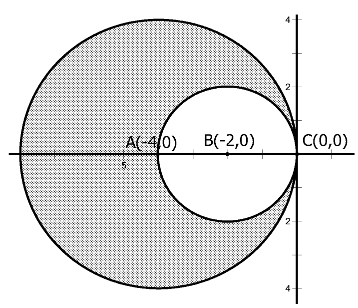
i to kružnicama sa središtima u $(-4, 0)$ i $(-2, 0)$ te radijusima $r_1 = 4$ i $r_2 = 2$, redom.

Transformirajmo ove jednadžbe u polarni oblik korištenjem formula $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Dobiva se:

$r_1 = 8\cos\varphi$ za prvu kružnicu i

$r_2 = 4\cos\varphi$ za drugu kružnicu.

Treba još odrediti granice integracijskog područja. Sa slike se vidi da je $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$, pa je



$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} ((8\cos\varphi)^2 - (4\cos\varphi)^2)d\varphi = 24\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \\ &= 24\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2}d\varphi = 24\cdot\frac{1}{2}(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 12\pi. \end{aligned}$$

Postoji i slična formula za krivulje zadane parametarski: ako je lik čiju površinu P tražimo omeđen krivuljom $x = x(t)$, $y = y(t)$, gdje $t \in [t_1, t_2]$ te $t = t_1$ za $x = a$ i $t = t_2$ za $x = b$, onda je

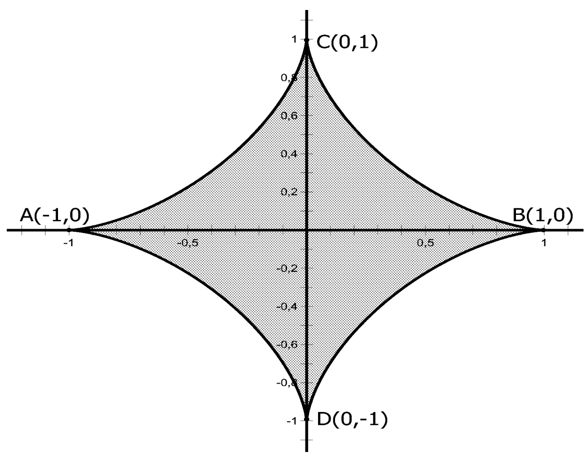
$$P = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt.$$

Primjer 16

Izračunajte površinu P ravninskog lika omeđenog krivuljom $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Rješenje:

Skicirajmo ovu krivulju u pravokutnom koordinatnom sustavu da dobijemo slikovni prikaz područja čiju površinu trebamo izračunati.



Primijetimo da površinu P možemo izraziti na sljedeći način: $P = 4P_1$, gdje je P_1 površina dijela lika na slici koji se nalazi u prvom kvadrantu. Sada je jasno da je $P = 4\int_0^1 \sqrt{(1 - x^{\frac{2}{3}})^3} dx$. Sada možemo koristiti supstituciju $x = \sin^3 t$, odakle izlazi $dx = 3\sin^2 t \cos t dt$. Izračunajmo još i nove granice integracije:

$0 = x = \sin^3 t \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$,

$1 = x = \sin^3 t \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Sada imamo

$$P = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - (\sin^3 t)^{\frac{2}{3}})^3} \cdot 3\sin^3 t \cos t dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t dt = \ldots = \frac{3}{8}\pi.$$

Može se vidjeti da se isto dobiva ako se odmah na početku krivulja (zapisana u svom *implicitnom* obliku) parametrizira korištenjem sljedeće parametrizacije: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ (provjerite da se radi o dobroj parametrizaciji uvrštavanjem u početnu jednadžbu krivulje!). Trebamo pronaći i granice intervala integracije za područje površine P_1:

$0 = x = \cos^3 t \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$,

$1 = x = \cos^3 t \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0$.

Korištenjem formule za površinu omeđenu parametarski zadanom krivuljom i činjenice da je $P = 4P_1$ imamo

$$P \;=\; 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3 t\cdot(-3)\cdot\cos^2 t\cdot\sin t dt = -12\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4 t\cos^2 t dt = \ldots = \frac{3}{8}\pi.$$

Zadatak 5 Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama:

(1) $y = x^2$, $y = 4x$

(2) $y = x^2 - 1$, $y = 4|x| - 5$

(3) $y = x(x-1)(x-2)$ i $x-$osi.

(4) $y = \frac{\pi}{4}$, $y = \arctan\frac{1}{x}$

(5) $y = \frac{\pi}{6}$, $y = \arcsin\frac{1}{x}$

(6) $y = x^2$, $y = x^3 - 2x$

(7) $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ i nejednakostima $x \geq 0$, $y \geq 0$

(8) $4x^2 - 7y^2 = 20$, $4y^2 - x^2 = 4$

(9) $4x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + 4y^2 = 4$

(10) $y = x\arctan x^3$, $y = \frac{\pi}{4}|x|$

(11) $(x+3)^2 + y^2 = 4(x+3)$, $y^2 = 2(x+3)$

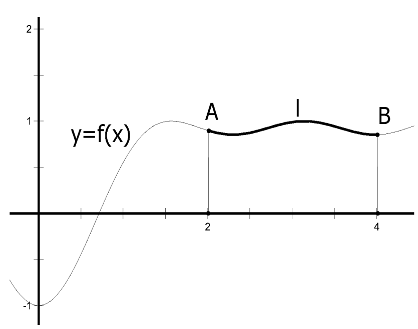
(12) $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 2x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

(13) $4x^2 - y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$

(14) $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 3$.

2.2 Duljina luka krivulje

Problem kojeg rješavamo glasi: za danu krivulju $y = f(x)$ nađite duljinu luka l te krivulje na intervalu $[a, b]$ (vidi sliku). Točnije, tražimo duljinu onog dijela krivulje koji je omeđen točkama $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$.



Formula koju ovdje nećemo izvoditi kaže da je duljina luka l dana s

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Primjer 17

Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \cosh x$ od točke s apscisom $x = 0$ do točke s apscisom $x = \ln 2$.

Rješenje:

U ovom ćemo zadatku koristiti poznati identitet $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ te činjenicu da je $(\cosh x)' = \sinh x$. Imamo

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + ((\cosh x)')^2} dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \\ &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\cosh^2 x} dx = \int_0^{\ln 2} |\cosh x| dx = \\ &= (jer je \cosh na \ \mathbb{R}_+ \ pozitivna) = \int_0^{\ln 2} \cosh x dx = (\sinh x)|_0^{\ln 2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ako se radi o zatvorenoj kriuvlji, može se umjesto o duljini luka govoriti o ***opsegu*** krivulje, što znači da tražimo duljinu zatvorenog luka kod kojeg se početna i krajnja točka luka podudaraju. U tom slučaju obično je moguće opseg krivulje izračunati kao multipl duljine luka nekog dijela krivulje. Ovaj "trik" se često primjenjuje kod simetričnih krivulja, kao u donjem primjeru.

Primjer 18

Izračunajte opseg krivulje iz Primjera 16.

Rješenje:

Sa slike ove krivulje jasno je (zbog simetričnosti) da opseg O ove krivulje možemo izraziti kao $O = 4O_1$, gdje je O_1 duljina luka dijela krivulje koji se nalazi u 1. kvadrantu, dakle luka omeđenog točkama s apscisama $x = 0$ i $x = 1$.

Formula za duljinu luka podrazumijeva da je krivulja $y = f(x)$ izražena ***eksplicitno***. Kod funkcije iz ovog primjera to je problem, ali možemo računati na sljedeći način: implicitno deriviranje izraza $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ daje

$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}} \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, pa je

$$\begin{aligned} l &= 4\int_0^1 \sqrt{1 + (-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}})^2} dx = 4\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = 4\int_0^1 \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = \\ &= 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = 4\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = 4 \cdot \frac{3}{2}(x^{\frac{2}{3}})|_0^1 = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6. \end{aligned}$$

Kao i kod površine ravninskog lika, i ovdje postoji formula za duljinu luka l krivulje zadane u polarnim koordinatama. Ona za krivulju $r = r(\varphi)$ u granicama

$[\varphi_1, \varphi_2]$ glasi
$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

Dalje, za parametarski zadanu krivulju $x = x(t)$, $y = y(t)$ duljina luka l omeđenog točkama A i B kojima pripadaju redom parametri t_1 i t_2 dana je s
$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Primjer 19

Izračunajte opseg krivulje iz Primjera 16. korištenjem formule za duljinu luka parametarski zadane krivulje.

Rješenje:

Koristimo transformaciju opisanu u Primjeru 16. da dobijemo zapis krivulje u parametarskom obliku: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. Granice integracije dane su s $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$ (donja granica je t_1 pripada točki krivulje $(1, 0)$, a gornja granica t_2 točki krivulje $(0, 1)$; ovaj izbor smo učinili da postignemo pozitivan smjer obilaska luka - smjer suprotan kretanju kazaljke na satu). Da bismo iskoristili formulu za duljinu luka krivulje zapisane u parametarskom obliku moramo naći derivacije funkcija $x(t)$ i $y(t)$:

$x'(t) = 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)$

$y'(t) = 3\sin^2 t \cdot \cos t$

Sada imamo:
$$\begin{aligned} l &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3\cos^2 t \cdot (-\sin t))^2 + (3\sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt = \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 t \cdot \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t \cos t dt = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6(\frac{-\cos 2t}{2})|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6. \end{aligned}$$

Napomena:

Analogna formula onoj za duljinu l luka krivulje zadane s $y = f(x)$ (između točaka s apscisama $x_1 = a$, $x_2 = b$) postoji i ako je krivulja zadana jednadžbom u kojoj je x varijabla funkcijski eksplicitno izražena preko varijable y: za funkciju $x = g(y)$ duljina l luka krivulje između točaka na krivulji s *ordinatama* $y_1 = c$ i $y_2 = d$ dana je s
$$l = \int_c^d \sqrt{1 + g'(y)^2} dy.$$

Zadatak 6 Izračunajte duljinu luka (ako nije naznačen interval traži se opseg) krivulje zadane s:

(1) $y = \ln \sin x$, $x \in [\frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}]$

(2) $y = \ln(1 + \cos x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(3) $x = \ln \frac{1}{\cos y}$, $y \in [0, \frac{\pi}{3}]$

(4) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $y \in [1, e]$

(5) $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y(t) = t^2 + 2$, $t \in [0, 3]$

(6) $x(t) = \cos t + t \sin t$, $y(t) = \sin t - t \cos t$, $t \in [0, \pi]$

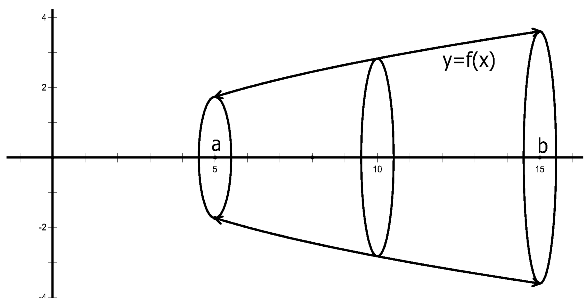
(7) $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - cost$, $t \in [2\pi, 4\pi]$

(8) $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$

(9) $9y^2 = (x-3)^2 x$.

2.3 Volumen rotacijskog tijela

Graf funkcije f rotiramo oko $x-$osi. Postavlja se pitanje: koji je volumen V tijela dobivenog rotacijom lika određenog dijelom grafa funkcije f te pravcima $x = a$, $y = b$ i $x-$ osi (vidi sliku)?



Odgovor daje sljedeća formula:

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Međutim, postoji formula i za rotaciju lika određenog grafom funkcije f na intervalu $[a, b]$ na $x-osi$ *oko* $y-osi$. Ta formula glasi:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Također, ako imamo funkciju $x = g(y)$ (gdje je x eksplicitno izražen preko y) i rotacijski interval $[c, d]$ na $y-osi$ te rotiramo oko $y - osi$, imat ćemo:

$$V_y = \pi \int_c^d g(y)^2 dy.$$

Ako rotiramo lik određen grafom funkcije f na intervalu $[c, d]$ na $y-osi$ *oko* $x-osi$, imat ćemo formulu

$$V_x = 2\pi \int_c^d g(y) y dy.$$

Sažeto ove četiri formule možemo pregledno iskazati jednom tablicom:

integr. po ↓ / rot. oko →	$x-$osi	$y-osi$
$[a,b]$ na $x-$osi	$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$	$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$
$[c,d]$ na $y-$osi	$V_x = 2\pi \int_c^d g(y) y dy$	$V_y = \pi \int_c^d g(y)^2 dy$

Također, imamo i formulu za volumen rotacijskog tijela koje je dobiveno rotacijom područja *između* dviju krivulja. U tom slučaju koristimo slične formule kao u gornjoj tablici, uz primjenu modela iz dijela o površini područja omeđenog dvjema krivuljama. Npr. za volumen V tijela nastalog rotacijom područja omeđenog krivuljama $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ na intervalu $[a,b]$ oko $x-$osi koristimo formulu

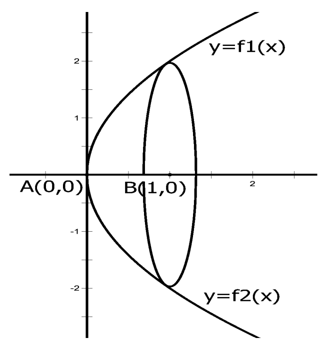
$$V = \pi \int_a^b (f_1(x)^2 - f_2(x)^2) dx$$

i slično za ostale formule.

Primjer 20

Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom oko $x-$osi lika omeđenog parabolom $y^2 = 4x$ i pravcem $x = 1$.

Rješenje:



Naša funkcija nije eksplicitno izražena preko integracijske varijable x, ali to formula niti ne zahtijeva: imamo $y^2 = f(x)$, što je upravo izraz koji se traži u formuli.

Očito je sa slike da moramo koristiti formulu za integraciju duž intervala $[0,1]$ na $x-$osi za rotaciju oko $x-$osi, pa imamo

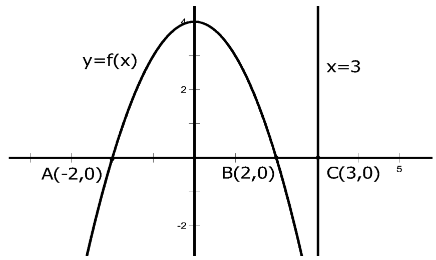
$$V_x = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 4x dx = 2\pi (x^2)|_0^1 = 2\pi.$$

Ponekad se zadaje rotacija oko pravaca paralelnih s $x-$osi, odnosno s $y-$osi. U tom slučaju primjenjujemo iste formule, ali moramo izvršiti translaciju cjelokupnog koordinatnog sustava, kao u donjem primjeru.

Primjer 21

Izračunajte volumen V tijela nastalog rotacijom oko pravca $x = 3$ lika omeđenog parabolom $y = 4 - x^2$ i $x-$osi.

Rješenje:



Rotacija oko pravca $x = 3$ znači da ćemo zahtijevati da u točki $\tilde{O}(3,0)$ bude ishodište novog koordinatnog sustava $(\tilde{O}, \tilde{x}, \tilde{y})$ čija je veza sa starim dana s $\tilde{x} = x - 3$, $\tilde{y} = y$. Tako u novom koodinatnom sustavu točka $(3,0)$ (zapisana u starom sustavu) postaje $(0,0)$. Formulu za volumen primijenit ćemo u odnosu na novi sustav. To znači da trebamo napisati nove granice integracije, novu podintegralnu funkciju i novi diferencijal u skladu s gornjim transformacijskim formulama $(x,y) \to (\tilde{x}, \tilde{y})$.

Kako se radi o rotaciji oko pravca $x = 3$, a to je pravac paralelan s $y-$osi, riječ je u biti o rotaciji oko novonastale $\tilde{y}-$osi, pa primjenjujemo formulu za V_y.

Još se trebamo odlučiti koju ćemo integraciju koristiti. S obzirom da se transformacijom koordinatnog sustava ne mijenjaju $y-$koordinate (jer je $\tilde{y} = y$), a samim time niti diferencijal, koristit ćemo za integraciju duž $\tilde{y}-$osi.

Volumen V izrazimo kao razliku volumena V_1 i V_2 koji se dobiju rotacijom redom lijevog, odnosno desnog kraka parabole oko $\tilde{y}-$osi. Očito je još preostalo samo da funkcijski izrazimo lijevi i desni krak u novim koordinatama, i to u smislu ovisnosti $\tilde{x}$ o $\tilde{y}$ (jer integriramo duž $\tilde{y}-$osi).

Lijevi krak: u starim koordinatama riječ je funkcijskoj vezi $x = g_1(y) = -\sqrt{4-y}$, a kako je $x = \tilde{x} + 3, y = \tilde{y}$, u novim koordinatama veza glasi $g_1(\tilde{y}) = -\sqrt{4-\tilde{y}} - 3$.

Desni krak: slično kao za lijevi krak u starim koordinatama imamo $x = g_2(y) = \sqrt{4-y}$, a u novim $g_2(\tilde{y}) = \sqrt{4-\tilde{y}} - 3$.

Računamo sada volumen:

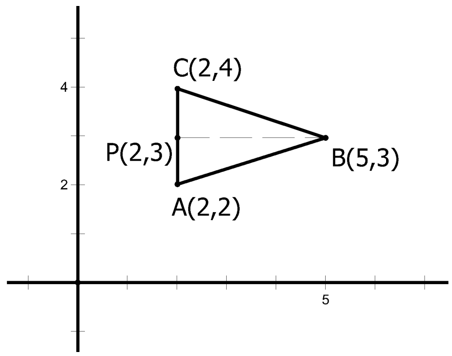
$$
\begin{aligned}
V &= V_1 - V_2 = \pi \int_0^4 (g_1(\tilde{y})^2 - g_2(\tilde{y})^2) d\tilde{y} = \\
&= \pi \int_0^4 ((-\sqrt{4-\tilde{y}} - 3)^2 - (\sqrt{4-\tilde{y}} - 3)^2) d\tilde{y} = \\
&= 12\pi \int_0^4 \sqrt{4-\tilde{y}} d\tilde{y} = 8\pi \\
&= 64\pi.
\end{aligned}
$$

Primjer 22

Trokut zadan vrhovima $A(2,2), B(5,3), C(2,4)$ rotira oko $y-$osi. Odredite volumen V nastalog tijela.

Rješenje:

Sa slike vidimo da se radi o trokutu simetričnom obzirom na pravac $y = 3$, pa volumen V možemo računati kao dvostruki volumen V_1 lika nastalog rotacijom



"donje polovice" trokuta određene s dva pravca: prvi pravac prolazi točkama A i B (pravac $y = 3x - 4$), a drugi točkama A i P (pravac $x = 2$).

"Gornja" funkcija (gledano s $y-$osi) dana je s $x = g_1(y) = \frac{y+4}{3}$, a "donja" s $x = g_2(y) = 2$. Očito je integracijsko područje dano s $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, pa imamo

$$\begin{aligned} V &= 2V_1 = 2\pi \int_2^3 (g_1(y)^2 - g_2(y)^2) dy = \\ &= 2\pi \int_2^3 ((\frac{y+4}{3})^2 - 4) dy = \frac{2\pi}{3} (\frac{y^3}{3} + 4y^2 + 4y)|_2^3 = \frac{182}{9}\pi. \end{aligned}$$

Zadatak 7

(1) Područje određeno krivuljama $y^2 = x$, $3y^2 = 2(x+2)$ rotira oko $x-$osi. Izračunajte volumen tako dobivenog tijela.

(2) Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika određenog sa $\sin x + 1 \leq y \leq 1$, $\pi \leq x \leq 2\pi$ oko $x-$osi.

(3) Nađite volumen tijela nastalog rotacijom kružnice $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ oko osi x $(b > a)$.

(4) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom krivulje $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ oko $x-$osi.

Zadatak 8

(1) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $(x-1)^2 \leq y \leq \sqrt{x-1}$ oko $y-$osi.

(2) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $y \leq x \leq 5y, y^2 \leq 6 - x$ oko osi y.

(3) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $\frac{3}{5\pi}|x| \leq y \leq |\sin x|$ oko $y-$osi.

(4) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja zadanog nejednadžbama $1 + \sin x \leq y \leq 1,\ \pi \leq x \leq 2\pi$ oko $y-$osi.

(5) Skup određen krivuljama $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 2x$, $y = x/\sqrt{3}$ rotira oko $y-$osi. Izračunajte volumen dobivenog tijela.

(6) Odredite volumen tijela nastalog rotacijom područja $y^2 \leq (2-x)(4+x)$ oko y osi.

(7) Odredite volumen tijela nastalog rotacijom krivulje $(y-2)^2 = x(4-x)$ oko $y-$osi.

Zadatak 9

(1) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $0 \leq y \leq \sin x$, $x \in [0, \pi]$ oko pravca $y = 2$.

(2) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $-1 \leq y \leq \sin x$ $x \in [0, 2\pi]$ oko pravca $y = 2$.

(3) Lik određen krivuljama $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $x \in [0, 4]$ rotira oko pravca $x = 1$. Izračunajte volumen tako dobivenog tijela.

(4) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom krivulje $4x^2 + 36y^2 = 144$ oko pravca $y = 2$.

(5) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom krivulje $x^2 + y^2 = 4$ oko pravca $y = -1$.

(6) Odredite volumen tijela nastalog rotacijom krivulje $y^2 = x(4-x)$ oko pravca $x = 1$.

2.4 Površina rotacijske plohe

Slično kao i u točki 2.3., bavimo se tijelom nastalim rotacijom dijela grafa funkcije $y = f(x)$ određenog točkama s apscisama $x \in [a, b]$. Međutim, ovdje se pitamo koja je površina P plašta takvog tijela. Odgovor daje formula

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

ako problem rješavamo u pravokutnim koordinatama. Ako je funkcija ekplicitno izražena u varijabli y s $x = g(y)$ a rotiramo oko y-osi, formula za površinu P rotacijske plohe dana je određenim integralom

$$P = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + g'(y)^2}dy$$

gdje je interval $[c, d]$ na y-osi.

Ako je zadana funkcija bila izražena parametarski: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, onda je formula za P dana s

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

Za funkciju zadanu parametarski $r = r(\varphi)$ na intervalu $[\varphi_1, \varphi_2]$ je

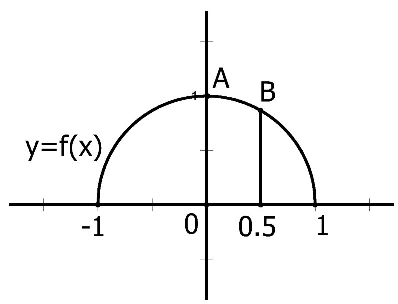
$$P = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin\varphi \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

Primjer 23

Izračunajte površinu P plohe nastale rotacijom krivulje $y = \sqrt{1 - x^2}$ na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$ oko $x-$osi.

Rješenje:

Očito se radi o gornjoj polukružnici, a luk kojeg rotiramo označen je na slici točkama A i B.



Da bismo mogli primijeniti formulu potrebno je pronaći derivaciju funkcije $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Ona je dana s $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, pa imamo

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + (-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}})^2} dx = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} dx = 2\pi (x)|_0^{\frac{1}{2}} = \pi \end{aligned}$$

Primjer 24

Izračunajte površinu rotacijske plohe nastalu rotacijom oko y-osi dijela krivulje $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ određenog točkama s ordinatama $y \in [2, 4]$.

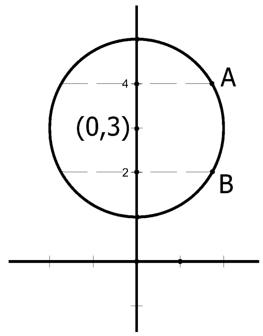
Rješenje:

Najprije treba vidjeti o kojoj je krivulji riječ i skicirati je u koordinatnom sustavu. Lijevu stranu možemo nadopuniti do potpunog kvadrata dodavanjem broja 4:

$x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0/ + 4 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 2^2$.

Dakle, vidimo da se radi o kružnici sa središtem u točki $(0, 3)$ i radijusom $r = 2$.

Treba rotirati onaj dio kružnice koji ima točke s ordinatama $y \in [2, 4]$, pa je očito da se radi o luku koji je na slici točkama A i B (zbog simetričnosti je dovoljno promatrati samo luk desne polukružnice; prilikom rotacije taj luk će "pasti" u luk lijeve polukružnice).



Da bismo mogli primijeniti formulu za površinu plohe nastale rotacijom luka oko y-osi moramo izraziti x eksplicitno kao funkciju od y (to je podintegralna funkcija $g(y)$). Međutim, iz izraza $x^2 + (y-3)^2 = 4$ to nije sasvim jednostavno (riješite zadatak na taj način!). Mi ćemo koristiti sljedeći "trik": transformirajmo podintegralni izraz

$$g(y)\sqrt{1+g'(y)^2} = \sqrt{g(y)^2(1+g'(y)^2)} = \sqrt{g(y)^2 + (g(y)g'(y))^2}.$$

Kako je $g(y) = x$, zapravo se pod integralom nalazi izraz $\sqrt{x^2 + (xx')^2}$. Ova dva izraza možemo lako izračunati iz implicitnog zapisa jednadžbe kružnice:

$x^2 + (y-3)^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4-(y-3)^2$, dok deriviranjem tog izraza dobivamo $2xx' = -2(y-3) \Rightarrow xx' = -(y-3) \Rightarrow (xx')^2 = (y-3)^2$.

Sada imamo

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_2^4 \sqrt{x^2 + (xx')^2} dy = 2\pi \int_2^4 \sqrt{4-(y-3)^2+(y-3)^2} dy = \\ &= 2\pi \int_2^4 2dy = 4\pi(x)|_2^4 = 8\pi. \end{aligned}$$

Zadatak 10

(1) Odredite površinu plohe koja nastaje rotacijom dijela krivulje $y = |x|$ oko $x-$osi između $x = -1$ i $x = 2$.

(2) Odredite površinu plohe nastale rotacijom krivulje $y^2 = (2-x)(x+3)$ oko $x-$osi.

(3) Izračunajte površinu plohe nastalog rotacijom lika određenog krivuljama $y = x,\ \sqrt{3}y = x,\ x^2 + y^2 = 2x$ oko $x-$osi.

(4) Sinusoida $y = \sin 2x$ rotira oko x-osi u intervalu $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Izračunajte površinu nastale rotacijske plohe.